Beweis der Korrektheit des Unifikationsalgorithmus

$\theta = \theta_1 \ldots \theta_n$ ist allgemeinster Unifikator (mgu) für $\mathcal{U}$
d.h. θ ist Lösung für $\mathcal{U}$ und für alle Lösungen σ für $\mathcal{U}$ gibt es λ mit $\theta\lambda = \sigma$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über $\mathcal{U}$

<u>IA:</u> $n = 0$ $\quad \mathcal{U} = \cdot\{\}\cdot$ $\quad \theta = \epsilon$

für alle σ gilt $\epsilon = \sigma$ wegen $\epsilon\sigma = \epsilon$

<u>IH:</u> Die Behauptung gilt für n.

d.h. $\mathcal{U} \xrightarrow[\theta_1]{} \mathcal{U}_1 \xrightarrow[\theta_2]{} \ldots \xrightarrow[\theta_n]{} \mathcal{U}_n$ $\quad$ Sei $\theta = \theta_1 \ldots \theta_n$

θ ist mgu für $\mathcal{U}$.

<u>IS:</u> Wir betrachten $\mathcal{U}' \xrightarrow[\theta_0]{} \mathcal{U} \xrightarrow[\theta_1]{} \mathcal{U}_1 \xrightarrow[\theta_2]{} \ldots \xrightarrow[\theta_n]{} \mathcal{U}_n$ $\quad$ Sei $\theta' = \theta_0 \ldots \theta_n = \theta_0\theta$

zu zeigen: θ' ist mgu für $\mathcal{U}'$

d.h. (1) θ' ist Unifikator für $\mathcal{U}$

(2) für alle Unifikatoren σ' für $\mathcal{U}'$ gibt es ein λ mit $\theta'\lambda = \sigma'$

<u>1. Fall</u> Triviale Gleichungen eliminiert

$\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \cdot\{X \approx X\}\cdot$ $\quad \theta_0 = \epsilon$ $\quad \theta' = \theta_0\theta = \epsilon\theta = \theta$

zu (1) Sei $s \approx t \in \mathcal{U}'$

(a) $s \approx t \in \mathcal{U}$

$$
\begin{aligned}
s\theta' &= s\theta \\
&= t\theta \text{ (IH)} \\
&= t\theta'
\end{aligned}
$$

(b) $s \approx t = X \approx X$

$X\theta' = X\theta'$

zu (2) Sei σ' Unifikator für $\mathcal{U}'$, dann ist σ' auch Unifikator für $\mathcal{U}$, wegen der Tatsache, dass jede in $\mathcal{U}$ vorkommend Gleichung auch in $\mathcal{U}'$ vorkommt.
Wegen IH finden wir ein λ mit $\theta\lambda = \sigma'$.
Wegen $\theta' = \theta$ gilt $\theta'\lambda = \sigma'$.

<u>2. Fall</u> Dekomposition

$\mathcal{U}' = (\mathcal{U} \setminus \cdot\{s_i \approx t_i \mid 1 \leq i \leq n\}\cdot) \cup \cdot\{f(s_1, \ldots, s_n) \approx f(t_1, \ldots, t_n)\}\cdot$

$\theta_0 = \epsilon \Rightarrow \theta' = \theta$

zu (1) Sei $s \approx t \in \mathcal{U}'$

(a) $s \approx t \in \mathcal{U}$

$$
\begin{aligned}
s\theta' &= s\theta = t\theta \text{ (IH)} \\
&= t\theta'
\end{aligned}
$$

(b) $s \approx t = f(s_1, ..., s_n) \approx f(t_1, ..., t_n)$

$$
\begin{aligned}
f(s_1, ..., s_n)\theta' &= f(s_1, ..., s_n)\theta \\
&= f(s_1\theta, ..., s_n\theta) \\
&= f(t_1\theta, ..., t_n\theta) \text{ (IH)} \\
&= f(t_1, ..., t_n)\theta \\
&= f(t_1, ..., t_n)\theta'
\end{aligned}
$$

zu (2) Sei σ' Unifikator für $\mathcal{U}'$, dann ist σ' auch Unifikator für $\mathcal{U}$, wobei $s \approx t \in \mathcal{U}$ weil:

(a) $s \approx t = s_i \approx t_i$

wegen $f(s_1, ..., s_n) \approx f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{U}'$ und σ' Unifikator für $\mathcal{U}'$ folgt $s_i\sigma' = t_i\sigma'$ für $i \le n$

(b) $s \approx t \in \mathcal{U}'$ folgt Aussage wie unter Fall 1

<u>Fall 3</u> Variablenelimination

$\mathcal{U}' = \mathcal{U}'' \cup \cdot\{X \approx r\}\cdot \; \theta_0 = \{X \mapsto r\}$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}'' \{X \mapsto r\} = \mathcal{U}''\theta_0$ (X kommt in r nicht vor)

zu (1) Sei $s \approx t \in \mathcal{U}'$

(a) $s \approx t \in \mathcal{U}''$ dann gilt $s\theta_0 \approx t\theta_0 \in \mathcal{U}$

$$
\begin{aligned}
s\theta' &= s(\theta_0\theta) \\
&= (s\theta_0)\theta \\
&= (t\theta_0)\theta \text{ (IH)} \\
&= t(\theta_0\theta) \\
&= t\theta'
\end{aligned}
$$

(b) $s \approx t = X \approx r$ dann gilt $X\theta_0 = r\theta_0$ (X kommt nicht in r vor)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow X\theta' &= X(\theta_0\theta) \\
&= (X\theta_0)\theta \\
&= (t\theta_0)\theta \\
&= t(\theta_0\theta) \\
&= t\theta'
\end{aligned}
$$

zu (2) Sei σ' ein Unifikator für $\mathcal{U}'$, dann ist $\sigma'\backslash\{X \mapsto X\sigma'\}$ Unifikator für $\mathcal{U}$ weil:

Sei $s \approx t \in \mathcal{U}$ dann gilt $s' \approx t' \in \mathcal{U}'$ mit $s = s'\theta_0$ und $t = t'\theta_0$

$$
\begin{aligned}
s\sigma &= (s\theta_0)\sigma \\
&= s'\{X \mapsto r\} (\sigma'\backslash\{X \mapsto X\sigma'\}) \\
&= s'(\{X \mapsto X\sigma'\} \cup \{X \mapsto u \mid Y \mapsto u \in \sigma'\backslash\{X \mapsto X\sigma'\}) \\
r\sigma' &= x\sigma' \\
&= s'\sigma' \\
&= t'\sigma' \text{ (...)} \\
&= t\sigma
\end{aligned}
$$

Wegen IH finden wir λ mit $\theta\lambda = \sigma$.

Zu zeigen: Es existiert λ' mit $\theta'\lambda' = \sigma'$. Wir zeigen, dass gilt: $\theta'\lambda = \sigma'$ bzw. $\lambda = \lambda'$

Sei $Y \in \mathcal{V}$

(a) $Y \neq X$

$$
\begin{aligned}
Y\theta\lambda &= Y\theta_0\theta\lambda \\
&= Y\theta_0\lambda \\
&= Y\sigma \text{ (IH)} \\
&= Y\sigma'
\end{aligned}
$$

(b) $Y = X$

$$
\begin{aligned}
X\theta'\lambda &= Y\theta_0\theta\lambda \\
&= r\theta\lambda \\
&= r\sigma \text{ (IH)} \\
&= X\sigma' \text{ (wegen } \sigma' \text{ Unifikator für } \mathcal{U}' \text{ und } r \approx X \in \mathcal{U}'\text{)}
\end{aligned}
$$

Eine Anwendung des Induktionsprinzips für natürliche Zahlen liefert die Korrektheit des Unifikationsalgorithmus.

□