11.Übung

Ü61

(a)

A_1^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 4\quad -3}}^{A_1}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\ 0\ 0}}^{E}} \\ 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II:\ II+2I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III:\ III-I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III:\ III-3II} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I:\ I-4II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I:\ I+3III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\ 0\ 0}}^{E}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{-28\quad -13\quad 3}}^{A_1^{-1}}} \\ 1 & 0 & 0 & -28 & -13 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A_2^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II:\ II-4I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II:\ II+10III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -4 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III:\ 11III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -4 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I:\ 11I-3III} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 11 & 0 & -4 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I-III\ \div 11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \quad A_2^{-1} = \frac{1}{11} * \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A_3^{-1}:
Diese Matrix ist nicht invertierbar. Es gibt zwei Strategien um dies zu zeigen. Die erste Möglichkeit ergibt sich aus der folgenden Gesetzmäßigkeit:

$$\boxed{\begin{array}{c} A \in K^{n\times n} \text{ invertierbar} \iff \text{A hat Vollrang} \\ \iff \text{A hat n liner unabhängige Zeilen und n linear unabhängige Spalten} \end{array}}$$

Es genügt also in diesem Fall zu testen, ob alle drei Zeilenvektoren linear unabhängig sind und ob alle drei Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

$$\lambda_1 * \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 * \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$
$$-3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 1\lambda_3 = 0$$
$$1\lambda_1 - 2\lambda_2 - 1\lambda_3 = 0$$

Mit dem Gaußalgorithmus erhält man:

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$
$$0\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 = 0$$
$$0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind alle drei Zeilenvektoren linear unabhängig. Die selbe Betrachtung ist also noch einmal für die Spaltenvektoren zu führen:

$$\lambda_1 * \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 * \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 1\lambda_3 = 0$$
$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$$
$$5\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 = 0$$

Mit dem Gaußalgorithmus erhält man:

$$2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 1\lambda_3 = 0$$
$$0\lambda_1 + 17\lambda_2 - 7\lambda_3 = 0$$
$$0\lambda_1 + 17\lambda_2 - 7\lambda_3 = 0$$

Dieses Gleichungssystem ist auch für $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}$ erfüllt. Die drei Spaltenvektoren sind also nicht linerar unabhängig. Daraus folgt, dass die Matrix A_3 keinen Vollrang hat und somit $\underline{\text{ nicht invertierbar }}$ ist.
Die zweite Möglichkeit um die Nichtinvertierbarkeit zu zeigen wäre es die inverse Matrix A_3^{-1} nach den Regeln des Gaußalgorithmus zu berechnen. Dabei müsste dann eine Gleichung wegfallen, so dass vorn keine Einheitsmatrix E_3 mehr entstehen kann.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II:\ II-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III:\ III-3I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III:\ III-2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2+i & 3+i & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 2-i & 3-i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III:\ III*i} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2+i & 3+i & 0 & 1 & 0 \\ i+1 & 2i+1 & 3i+1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III:\ III-II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2+i & 3+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & 2i-2 & 0 & -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{III:\ III\div(i-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2+i & 3+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II:\ II*i} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ i-1 & 2i-1 & 3i-1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{II:\ II+I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ i & 2i+1 & 3i+3 & 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II:\ (II*i)+I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+3i & i+1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{I:\ I-2III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & i & 1+3i & i+1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II:\ II*-i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 3-i & 1-i & i & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{III:\ III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 3-i & 1-i & i & 0 \\ 0 & 0 & i-1 & i-1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II:\ II+III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & i-1 & i-1 & frac1-i2 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{III:\ III\div(i-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II:\ II-2III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1-i & -1+i \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{3+i}{2} & \frac{3-i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1-i & -1+i \\ -2 & \frac{3+i}{2} & \frac{3-i}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Möglicherweise gibt es hier auch einen kürzeren Lösungsweg.

Ü64

$$CXB = A + 2CX$$

$$\iff CXB - 2CX = A$$

$$\iff CX(B - 2E) = A$$

$$\iff X(B - 2E) = C^{-1}A \ (wenn\ C^{-1}\ existiert)$$

$$\iff X = C^{-1}A(B - 2E)^{-1} \ (wenn\ (B - 2E)^{-1}\ existiert)$$

Wir müssen noch zeigen, dass $(C)^{-1} und (B - 2E)^{-1}$ existieren:
Inverse Matrix von C:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I:\ -2*I} \xrightarrow{II:\ 4*II} \xrightarrow{III:\ 2*III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix von B-2E:

$$\left(\begin{array}{cccccc} -2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III:\ III-I\ \ II:\ 2II-I}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc} -2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{II:\ III-II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc} -2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{III:\ III+4II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc} -2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -8 & 5 \end{array}\right)$$

$$\overset{II:\ 6II-III\ \ I:\ 6I-5III}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc} -12 & 6 & 0 & 11 & 40 & -25 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -8 & 5 \end{array}\right) \overset{I:\ I-II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc} -12 & 0 & 0 & 10 & 44 & -26 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -8 & 5 \end{array}\right)$$

$$(B-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & -\frac{11}{3} & \frac{13}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich die Gleichung:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & -\frac{11}{3} & \frac{13}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & -\frac{11}{3} & \frac{13}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{46}{3} & -\frac{28}{3} \\ -6 & -24 & 14 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Ü65

Der Kern der Matrix A besteht aus allen Elementen x für die gilt $Ax = \mathbf{0}$.

$$Kern\ A = \{x \in GF(2)^7 | Ax = \mathbf{0}\}$$

Es entsteht ein Gleichungssystem. Stellt man dieses als Matrix dar, so ist dies genau die Matrix A. Mit dem Gaußalgorithmus (modulo 2) erhält man die Lösung:

$$Kern\ A = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \right\}$$

Daraus ergibt sich sofort die Dimension von A. Denn alle drei Vektoren sind linear unabhängig (In keiner Zeile haben alle Vektoren eine 1). Die drei Vektoren sind also Basisvektoren von $Kern\ A$. Da die Dimension die Anzahl der Basisvektoren ist folgt:

$$dim\ Kern\ A = 3$$

Da der Gaußalgorithmus ein Gleichungssystem mit vier verschiedenen Gleichungen liefert kann man schlussfolgern, dass A vier linear unabhängige Zeilen hat. Der Rang einer Matrix M bezeichnet das Minimum der Menge mit der Anzahl der linear unabhängigen Spalten von M und der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von M. Die Matrix A hat außerdem 7 linear unabhängige Spalten, da in keiner Zeile nur Einsen stehen. Es ergibt sich also:

$$rang\ A = 4$$

Außerdem gilt allgemein:

$$\boxed{dim\ Kern\ M + rang\ M = n\ (n \ldots \text{Anzahl der Spalten einer Matrix } M)}$$

In unserem Beispiel: $dim\ Kern\ A + rang\ A = 3 + 4 = 7$